

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

Considera la función $f : (-\infty, 10) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} a^x & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$

- (a) [1 punto] Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).
 (b) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .
 (c) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f .

Solución

$$(a) f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases} = \{\text{abrimos el valor absoluto}\} = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ -x + 5 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x < 10 \end{cases}$$

Como es continua en $x = 2$, tenemos que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 5) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (a^x - 6) = a^2 - 6; \text{ por tanto } a^2 - 6 = 3; \text{ de donde } a^2 = 9 \text{ y } a = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

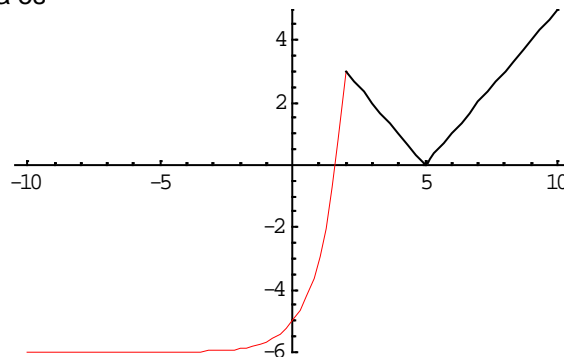
Como a es la base de una función exponencial tiene que ser positiva, luego $a = +3$

(b) la gráfica de $(3)^x - 6$ es como la de la exponencial $(3)^x$ (que es parecida a la de 2^x) pero desplazada 6 unidades hacia abajo en ordenadas. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(3)^x - 6] = -6$, tiene una A.H. $y = -6$ en

$-\infty$. Para $x = 0$ vale -5 y para $x = 2^+$ vale 3

$x - 5$ y $-x + 5$ son recta y con dos valores se dibuja (le damos los extremos del intervalo de cada una)

La gráfica de la función pedida es



(c) A simplemente se ve que no va a ser derivable en $x = 2$ y $x = 5$. Veámoslo

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ -x + 5 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x < 10 \end{cases}; f'(x) = \begin{cases} 3^x \cdot \ln(3) & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 < x < 10 \end{cases}$$

Veamos la derivada en $x = 2$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3^x \cdot \ln(3)) = 9 \cdot \ln(3)$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-1) = -1. \text{ Como } f'(2^-) \neq f'(2^+), \text{ no existe } f'(2)$$

Veamos la derivada en $x = 5$

$$f'(5^-) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (-1) = -1$$

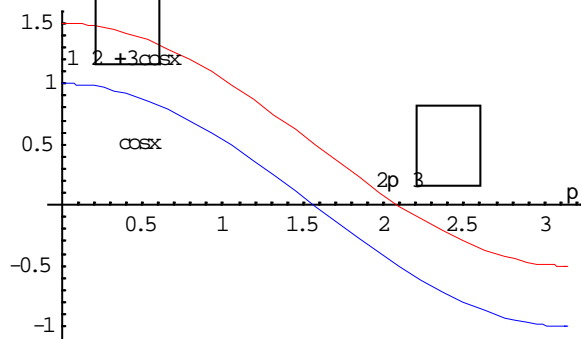
$$f'(5^+) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (1) = 1. \text{ Como } f'(5^-) \neq f'(5^+), \text{ no existe } f'(5)$$

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

- (a) [0'5 puntos] Determina el recinto limitado por la curva $y = 1/2 + \cos x$, los ejes coordenados y la recta $x = \pi$.
 (b) [2 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

(a) La gráfica de $y = 1/2 + \cos x$ es la misma que la de $y = \cos x$ pero desplazada $1/2$ hacia arriba en ordenadas. El recinto limitado (en rojo) es



Veamos el punto de corte con abcisas

$$1/2 + \cos x = 0; \cos x = -1/2; x = \arccos(-1/2) = 120^\circ = (2\pi)/3$$

$$(b) \text{Área} = \int_0^{2\pi/3} (1/2 + \cos x) dx - \int_{2\pi/3}^{\pi} (1/2 + \cos x) dx = \left[\frac{x}{2} + \text{sen}x \right]_0^{2\pi/3} - \left[\frac{x}{2} + \text{sen}x \right]_{2\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \left[\left(\frac{\pi}{3} + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) - 0 \right] - \left[\left(\frac{\pi}{2} + \text{sen}(\pi) \right) - \left(\frac{\pi}{3} + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \right] = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \text{ u.a.}$$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

[2'5 puntos] Determina a, b y c sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$ verifica $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\text{rango}(A) = 2$.

Solución

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7+2a \\ -1+2b+3c \end{pmatrix} \text{Igualando tenemos } \begin{cases} 9 = 7 + 2a \\ 4 = -1 + 2b + 3c \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} a=1 \\ 2b+3c=5 \end{cases}$$

Tenemos $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$. Como $\text{rango}(A) = 2$ tenemos que $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1-b & 1 & c-2b \end{vmatrix} = -4(c-2b) + 1(-1-b) = -4c+7b-1 = 0$$

$$\text{Resolvemos el sistema por Cramer } \begin{cases} 2b+3c=5 \\ 7b-4c=1 \end{cases}; b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{23}{29}; c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{33}{29};$$

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.-

[2'5 puntos] Considera los tres planos siguientes: $\pi_1 \equiv x+y+z = 1$; $\pi_2 \equiv x-y+z = 2$ y $\pi_3 \equiv 3x+y+3z = 5$. ¿Se cortan π_1 y π_2 ?, ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?.

Solución

$\pi_1 \equiv x+y+z = 1$; $\pi_2 \equiv x-y+z = 2$ y $\pi_3 \equiv 3x+y+3z = 5$, con vectores normales $\mathbf{n}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{n}_2 = (1,-1,1)$ y $\mathbf{n}_3 = (3,1,3)$

Para que π_1 corte a π_2 los vectores normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 no pueden ser proporcionales, pero $1/1 \neq 1/-1$, por tanto

no son proporcionales y los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

Para que los tres planos se corten en un punto el determinante de la matriz de los coeficientes tiene que ser

distinto de cero, es decir $\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \neq 0$, pero $\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ porque la columna 1ª y 3ª

son iguales, por tanto los tres planos no se cortan en un punto.

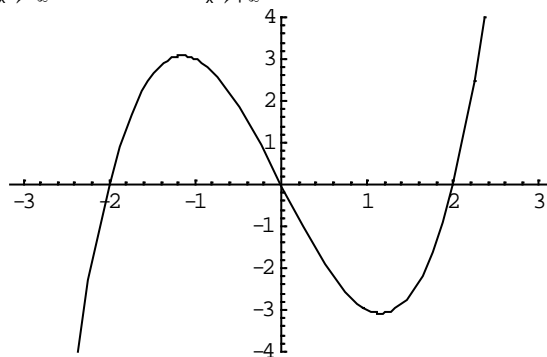
Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 6 de 2001.

[2'5 puntos] Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas

Solución

Calculamos los cortes son abscisas $x^3 - 4x = 0 = x(x^2 - 4) = 0$, de donde $x = 0$ y $x = \pm 2$

$y = x^3 - 4x$ es una cúbica con $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Aunque no la piden la gráfica es



El área pedida es $\text{Área} = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 =$
 $= [(0 - (4 - 8))] - [(4 - 8) - 0] = 8 \text{ u.a.}$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

[2'5 puntos] Determina α sabiendo que existe y es finito el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \text{sen}x}$. Calcula dicho límite.

Solución

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \text{sen}x} = \frac{e^0 - e^0 + 0}{0 - \text{sen}0} = (0/0) \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1) + \alpha}{1 - \cos x} = \frac{e^0 + e^0 + \alpha}{1 - \cos 0} = \frac{2 + \alpha}{0}$

Como el problema dice que existe límite tiene que ser $2 + \alpha = 0$, de donde $\alpha = -2$

Seguimos ya con el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = (0/0) \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{1 + \text{sen}x} = \frac{e^0 + e^0}{1 + \text{sen}0} = 2/1 = 2$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

(a) [1'5 puntos] Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro m :
$$\begin{cases} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

(b) [1 punto] Resuelve el sistema anterior para $m = 6$

Solución

(a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & m \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el $\det(A)$ y aplicamos el teorema de Rouché

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(-m) - m(3-m) = -5m + m^2 = m(m - 5)$

$|A| = 0$ implica que $m(m - 5) = 0$ de donde $m = 0$ y $m = 5$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 5$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. Sistema compatible y determinado, solución única.

Si $m = 0$

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(0-0) = 0, \text{ rango}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2$ el sistema es compatible e indeterminado. Tiene dos ecuaciones y dos incógnitas principales luego depende de un parámetro y tiene infinitas soluciones.

Si $m = 5$

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5) - 5(-4) = 5 \neq 0, \text{ rango}(A^*) = 3.$$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b) Lo resolvemos para $m = 6$

$$\text{El sistema es } \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ x + 6z = 6 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{La matriz de los coeficientes es } A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por Cramer. $|A| = m(m-5) = 6(6-5) = 6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6(12)}{6} = -12; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(12)}{6} = 4; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-12+30}{6} = 3$$

La solución del sistema es $(x,y,z) = (-12, 4, 3)$

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

[2'5 puntos] Considera los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,0,2)$. Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A , B y C .

Solución

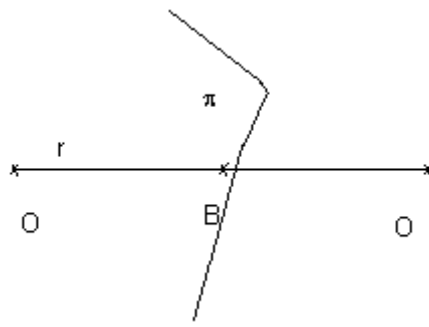
$\overline{AB} = (2,0,-2)$; $\overline{AC} = (1,-2,-1)$. El plano pedido π pasa por el punto $A(1,2,3)$ y es paralelo a los vectores \overline{AB} y \overline{AC}

$$\pi \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)(-4) - (y-2)(0) + (z-3)(-4) = -4x - 4z + 16 = 0. \text{ Simplificando tenemos}$$

$$\pi \equiv x + z - 4 = 0$$

El simétrico de O respecto al plano π es el simétrico de O respecto del punto B , siendo $B = r \cap \pi$ con r la recta perpendicular a π por O , por tanto el director de r es el vector normal de π . $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (1,0,1)$

$$\text{La recta } r \text{ en paramétricas es } r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$



$$B = r \cap \pi$$

$(\lambda) + (\lambda) - 4 = 0$. Operando $2\lambda = 4$, de donde $\lambda = 1$.

El punto B es $B(1,0,1)$

B es el punto medio del segmento OO' , siendo O' el simétrico del punto O pedido, luego

$(1,0,1) = ((0+x)/2, (0+y)/2, (0+z)/2)$. Igualando nos queda $x = 4$, $y = 0$ y $z = 4$, luego el simétrico es $O'(4,0,4)$